Método do Segundo Momento

- Veremos que em algumas aplicações ñ será suficiente apenas calcular a esperança de uma variável aleatória. Teremos que provar que com alta probabilidade a variável aleatória é concentrada em torno da sua média.

Def. 5.6.1. A <u>variância</u> de uma variável aleatória X é definida por

$$\mathrm{Var}(X) := \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right].$$

Ademais, definimos o <u>desvio padrão</u> de X como sendo

$$\sigma(X) := \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$$

Note também que podemos calcular a variância de uma variável aleatória usando a seguinte fórmula.

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2.$$

Além disso, temos que $\mathrm{Var}(cX) = c^2 \cdot \mathrm{Var}(X)$ p/ todo $c \in \mathbb{R}$.

Proposição 5.6.2 Se $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são variáveis aleatórias independentes, então

$$\mathrm{Var}(X_1 + \cdots + X_n) = \mathrm{Var}(X_1) + \cdots + \mathrm{Var}(X_n).$$

Um importante uso da variância é a desigualdade de Chebyshev.

Prop. Se X é uma variável indicadora, então
$$\mathbb{E}[X^2] = \mathbb{E}[X].$$

Demonstração

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X^2] &= 0 \cdot \mathbb{P}(X^2 = 0) + 1 \cdot \mathbb{P}(X^2 = 1) \\
&= 0 + 1 \cdot \mathbb{P}(X = 1) \\
&= \mathbb{E}[X]
\end{aligned}$$

$\square$

Proposição 5.6.3 (Desigualdade de Chebyshev) Se X é uma variável aleatória e $\lambda > 0$, então

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \lambda) \leq \frac{Var(X)}{\lambda^2}$$

Demonstração

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \lambda) = \mathbb{P}((X - \mathbb{E}[X])^2 \geq \lambda^2) \leq \frac{\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]}{\lambda^2}$$

$$= \frac{Var(X)}{\lambda^2}$$

$\square$

* Considere t eventos $A_1, \dots, A_t$ em um mesmo espaço de probabilidade e seja $X_i = \mathbb{1}_{A_i}$, para cada $i \in [t]$. Seja

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_t.$$

- Note que se A_i e A_j são independentes, então

$$\mathbb{E}[X_i X_j] = \mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j) = \mathbb{E}[X_i]\mathbb{E}[X_j]$$

- Iremos escrever $i \sim j$ se $i \neq j$ e A_i e A_j são dependentes e $i \nsim j$ se $i \neq j$ e A_i e A_j são independentes.

$$\mathbb{E}[X^2] = \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{t} X_i\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[(X_1+X_2+\cdots+X_t)(X_1+X_2+\cdots+X_t)\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[X_1(X_1+X_2+\cdots+X_t) + X_2(X_1+X_2+\cdots+X_t) + \cdots + X_t(X_1+X_2+\cdots X_t)\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{t} X_i X_j\right] = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{t} \mathbb{E}[X_i X_j]$$

$$= \sum_{i=1}^{t} \mathbb{E}[X_i^2] + \sum_{i\neq j} \mathbb{E}[X_i X_j]$$

$$= \sum_{i=1}^{t} \mathbb{E}[X_i] + \sum_{i\not\sim j} \mathbb{E}[X_i X_j] + \sum_{i\sim j} \mathbb{E}[X_i X_j]$$

$$= \sum_{i=1}^{t} \mathbb{E}[X_i] + \sum_{i\not\sim j} \mathbb{E}[X_i]\,\mathbb{E}[X_j] + \sum_{i\sim j} \mathbb{E}[X_i X_j]$$

$$\mathbb{E}[X]^2 = \left[\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{t} X_i\right)\right]^2 = \left(\sum_{i=1}^{t} \mathbb{E}[X_i]\right)^2$$

$$= (\mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[X_2] + \cdots + \mathbb{E}[X_t])(\mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[X_2] + \cdots + \mathbb{E}[X_t])$$

$$= \mathbb{E}[X_1](\mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[X_2] + \cdots + \mathbb{E}[X_t]) + \mathbb{E}[X_2](\mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[X_2] + \cdots + \mathbb{E}[X_t])$$
$$+ \cdots + \mathbb{E}[X_t](\mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[X_2] + \cdots + \mathbb{E}[X_t])$$

$$= \sum_{i=1}^{t} \mathbb{E}[X_i]^2 + \sum_{i \neq j} \mathbb{E}[X_i]\,\mathbb{E}[X_j]$$

$$= \sum_{i=1}^{t} \mathbb{E}[X_i]^2 + \sum_{i \sim j} \mathbb{E}[X_i]\,\mathbb{E}[X_j] + \sum_{i \approx j} \mathbb{E}[X_i]\,\mathbb{E}[X_j]$$

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$$

$$= \sum_{i=1}^{t} \mathbb{E}[X_i] + \cancel{\sum_{i \not\sim j} \mathbb{E}[X_i]\mathbb{E}[X_j]} + \sum_{i \sim j} \mathbb{E}[X_i X_j]$$

$$- \left(\sum_{i=1}^{t} \mathbb{E}[X_i]^2 + \sum_{i \sim j} \mathbb{E}[X_i]\mathbb{E}[X_j] + \cancel{\sum_{i \not\sim j} \mathbb{E}[X_i]\mathbb{E}[X_j]} \right)$$

$$= \mathbb{E}[X] + \sum_{i \sim j} \left(\mathbb{E}[X_i X_j] - \mathbb{E}[X_i]\mathbb{E}[X_j] \right) - \sum_{i=1}^{t} \mathbb{E}[X_i]^2$$

$$\leq \mathbb{E}[X] + \sum_{i \sim j} \mathbb{E}[X_i X_j]$$

$$= \mathbb{E}[X] + \sum_{i \sim j} \mathbb{P}(A_i \cap X_j)$$

$$= \mathbb{E}[X] + \Delta,$$

em que

$$\Delta := \sum_{i \sim j} \mathbb{P}(A_i \cap X_j)$$

<u>Proposição 5.6.5</u> Sejam $A_1, A_2, \dots, A_t$ eventos em um mesmo espaço de probabilidade e $X_i = \mathbb{1}_{A_i}$ e defina

$$X = X_1 + \dots + X_t.$$

Se $\mathbb{E}[X] \to \infty$ e $\Delta = o(\mathbb{E}(X)^2)$, então com alta probabilidade, temos $X > 0$.

<u>Demonstração</u>

Note que

$$\mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \frac{\mathbb{E}[X]}{2} \right) = \mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega : |X(\omega) - \mathbb{E}[X]| \geq \frac{\mathbb{E}[X]}{2}\} \right)$$

$$= \mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{2} \text{ ou } X(\omega) \geq \frac{\mathbb{E}(X)}{2} \} \right)$$

$$\geq \mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{2} \} \right) = \mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = 0 \} \right)$$

$$= \mathbb{P}(X = 0)$$

Assim, por Chebyshev, temos

usando o fato de que todos estão perto da média

$$\mathbb{P}(X=0) \leq \mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \frac{\mathbb{E}[X]}{2} \right) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{\left(\frac{\mathbb{E}[X]}{2}\right)^2} = \frac{4\,\mathrm{Var}(X)}{\mathbb{E}[X]^2}$$

Pelas hipóteses do enunciado, temos que

$$\frac{\mathrm{Var}(X)}{\mathbb{E}[X]^2} \leq \frac{\mathbb{E}[X] + \Delta}{\mathbb{E}[X]^2} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} + \frac{\Delta}{\mathbb{E}[X]^2} \to 0$$

Como $\mathbb{E}[X] \to \infty$, temos que $\frac{1}{\mathbb{E}[X]} \to 0$ e, como $\Delta = o(\mathbb{E}[X]^2)$, temos que $\frac{\Delta}{\mathbb{E}[X]^2} \to 0$

<u>Teo 5.6.6</u> Com alta probabilidade, temos

$$\alpha(G(n,1/2)) = (2+o(1)) \lg n$$

Demonstração

- Fixe $k \in [n]$.
- Para cada $S \subseteq V(G)$ com $|S| = k$, seja X_S a variável aleatória indicadora para o evento $e(G[S]) = 0$
- Considere

$$X = \sum_{S \in \binom{V(G)}{k}} X_S$$

- Para um $S \subseteq V(G)$ com $|S| = k$ fixo, note que

$$\mathbb{P}(e(G[S]) = 0) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{\binom{k}{2}}$$

- Assim, $\mathbb{E}[X] = \sum_{S \in \binom{V(G)}{k}} \mathbb{E}[X_S] = \sum_{S \in \binom{V(G)}{k}} \mathbb{P}(e(G[S]) = 0)$

$$= \sum_{S \in \binom{V(G)}{k}} \left(\tfrac{1}{2}\right)^{\binom{k}{2}} = \binom{n}{k} 2^{-\binom{k}{2}}$$

- Observe que $\alpha(G) \geq k$ sse $X > 0$
- A fim de concluir o teorema, será suficiente mostrar que para todo $\varepsilon > 0$,

i) Se $k > (2+\varepsilon) \lg n$, então $\mathbb{P}(X = 0) \to 1$

ii) Se $k < (2-\varepsilon) \lg n$, então $\mathbb{P}(X > 0) \to 1$

• Primeiro suponha que $k > (2+\varepsilon)\lg n$. Então

$$\mathbb{P}(X \geq 1) \overset{\text{Markov}}{\leq} \frac{\mathbb{E}[X]}{1} = \binom{n}{k} 2^{-\binom{k}{2}} \leq n^k 2^{-\frac{k(k-1)}{2}} = \left(n\, 2^{-\frac{k-1}{2}}\right)^k$$

$$\boxed{\frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)\cancel{(n-k)!}}{k!\,\cancel{(n-k)!}} \leq n^k}$$

$$\left(n\, 2^{-\frac{k}{2}+\frac{1}{2}}\right)^k = \left(\frac{n\,2^{1/2}}{2^{k/2}}\right)^k < \left(\frac{n\,2^{1/2}}{2^{\frac{2}{2}\lg n + \frac{\varepsilon}{2}\lg n}}\right)^k$$

pois $\frac{1}{n^{\varepsilon/3}} \leq 1$

$$\left(\frac{\cancel{n}\,2^{1/2}}{\cancel{n^1}\cdot n^{\varepsilon/2}}\right)^k = \left(\frac{\sqrt{2}}{n^{\varepsilon/2}}\right)^k \leq \left(\frac{1}{n^{\varepsilon/3}}\right)^k \leq \left(\frac{1}{n^{\varepsilon/3}}\right)^1 \to 0$$

$$\frac{\sqrt{2}}{n^{\varepsilon/2}} \leq \frac{1}{n^{\varepsilon/3}} \iff \sqrt{2} \leq \frac{n^{\varepsilon/2}}{n^{\varepsilon/3}}$$

$$\iff \sqrt{2} \leq n^{\varepsilon/2 - \varepsilon/3} \iff \sqrt{2} \leq n^{\frac{3\varepsilon - 2\varepsilon}{6}}$$

$$\iff \sqrt{2} \leq n^{\varepsilon/6}$$

• Logo $\mathbb{P}(X=0) = 1 - \mathbb{P}(X \geq 1) \to 1$ qndo $n \to \infty$.

- Agora, suponha que $k < (2-\varepsilon)\lg n$
- Então

$$\boxed{k < (2-\varepsilon)\lg n \iff -k > -(2-\varepsilon)\lg n}$$

$$\mathbb{E}[X] = \binom{n}{k} 2^{-\binom{k}{2}} \geq \left(\frac{n}{k}\right)^k 2^{-\binom{k}{2}} = \left(\frac{n\, 2^{-\frac{k-1}{2}}}{k}\right)^k$$

$$> \left(\frac{n\, 2^{-\frac{(2-\varepsilon)\lg n - 1}{2}}}{k}\right)^k = \left(\frac{n\left(2^{\lg n}\right)^{-\frac{(2-\varepsilon)}{2}} \cdot \sqrt{2}}{k}\right)^k$$

$$= \left(\frac{\cancel{n} \cdot n^{\varepsilon/2} \cdot \sqrt{2}}{\cancel{n} \cdot k}\right)^k > \left(\frac{n^{\varepsilon/2}\sqrt{2}}{(2-\varepsilon)\lg n}\right)^k$$

$$\geq \left(\frac{\sqrt{2}}{(2-\varepsilon)} \cdot \frac{n^{\varepsilon/2}}{\lg n}\right)^1 \to \infty$$

- Agora, temos que $\Delta = \sum_{S\sim T} \mathbb{P}(X_S X_T \geq 1)$, onde $S \sim T$ indica o somatório p/ todos os pares de conjuntos $S,T \in \binom{V(G)}{k}$ com $2 \leq |S \cap T| \leq k-1$. Calculando Δ, temos

Formas de escolher $S \cap T$

$$\Delta = \sum_{\substack{i=2 \\ i=|S\cap T|}}^{k-1} \binom{n}{k}\binom{n-k}{k-i}\binom{k}{i} 2^{\binom{i}{2}-2\binom{k}{2}}$$

Formas de escolher S

Formas de escolher $T \setminus S$

Probabilidade p/ um S, $T\setminus S$ e $T \cap S$ fixo

Novamente (agora sem a poluição)

$$\Delta = \sum_{i=2}^{k-1} \binom{n}{k}\binom{n-k}{k-i}\binom{k}{i} 2^{\binom{i}{2}-2\binom{k}{2}}$$

$$= \binom{n}{k} 2^{-2\binom{k}{2}} \sum_{i=2}^{k-1} \binom{n-k}{n-i}\binom{k}{i} 2^{\binom{i}{2}}$$

$$= \frac{\binom{n}{k}\binom{n}{k} 2^{-2\binom{k}{2}}}{\binom{n}{k}} \sum_{i=2}^{k-1} \binom{n-k}{n-i}\binom{k}{i} 2^{\binom{i}{2}}$$

$$= \frac{\left(\binom{n}{k} 2^{-\binom{k}{2}}\right)^2}{\binom{n}{k}} \sum_{i=2}^{k-1} \binom{n-k}{n-i}\binom{k}{i} 2^{\binom{i}{2}} = \mathbb{E}[X]^2 \sum_{i=2}^{k-1} \frac{\binom{n-k}{n-i}\binom{k}{i} 2^{\binom{i}{2}}}{\binom{n}{k}}$$

$$\mathbb{E}[X]^2 \sum_{i=2}^{k-1} g(i) \quad \text{, onde} \quad g(i) = \frac{\binom{n-k}{n-i}\binom{k}{i} 2^{\binom{i}{2}}}{\binom{n}{k}}.$$

Como provado no exercício, temos, para $2 \leq i \leq k-1$, que $g(i) = o(n^{-1})$, i.e., $\lim_{n\to\infty} \frac{g(i)}{\frac{1}{n}} = 0$

- Logo $\Delta = \mathbb{E}[X]^2 \sum_{i=2}^{k-1} o(n^{-1}) = \mathbb{E}[X]^2 \cdot k\, o(n^{-1})$

$$\leq \mathbb{E}[X]^2 \boxed{n\, o(n^{-1})}$$

$f(n) = o(n^{-1}) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{\frac{1}{n}} =$

$\lim_{n\to\infty} f(n)\cdot n = 0$

$$= \mathbb{E}[X]^2 o(1)$$

$$\frac{\Delta}{\mathbb{E}[X]^2} = o(1)$$

Ou seja $\Delta = o(\mathbb{E}[X]^2)$.

- Segue da Proposição 5.6.5 que, com alta prob., temos $X > 0$

$\square$